לוגיקה (1) פתרון תרגיל 6

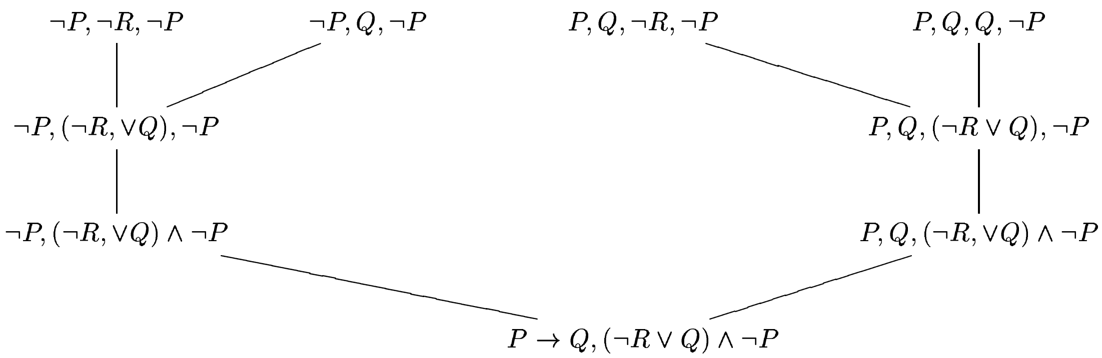
1. לכל n-ה של ערכי אמת $\alpha \in \{T,F\}^n$ נגדיר את ה-n-יה הדואלית α^D המוגדרת ע"י: $\alpha_i^D = T \Leftrightarrow \alpha_i = F$ לכל $i \le n$. זה מחלק את $\{T,F\}^n$ לזוגות. נשים לב כי פסוק ϕ הוא דואלי לעצמו אםם לכל $\alpha \in \{T,F\}^n$ מתקיים: $t_\phi(\alpha) \neq t_\phi(\alpha^D)$. (כאשר t_ϕ לוח האמת של ϕ). מכאן נובע כי המספר המקסימלי של לוחות אמת דואליים לעצמם הוא $2^{2^{n-1}}$ כי צריך לבחור ערך אמת רק עבור אחת ה-n-יות מתוך כל זוג (וזה קובע את ערך האמת של השניה) ויש 2^{n-1} זוגות. מצד שיני לכל לוח אמת כזה יש קשר מתאים והקשר דואלי לעצמו. קיבלנו כי $2^{2^{n-1}}$ חסם כנדרש.

2.

(א) ראשית נשים לב כי הקשר $\vee$ מתקבל מקבוצת הקשרים $\{\neg,\wedge\}$ ע"י כלל ד-מורגן: $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. לכן קבוצת הקשרים $\{\neg,\wedge\}$ שלמה. כעת $\neg$ מתקבל מהקשר $nand$ מכיוון ש:$\neg\phi \equiv (\phi \diamond \phi)$ (בידקו). וכן $\wedge$ מתקבל מהקשר $nand$ מכיוון ש:$\phi\wedge\psi \equiv (\phi\diamond\psi)\diamond(\phi\diamond\psi)$. ולכן $\{\diamond\}$ קבוצת קשרים שלמה.

(ב) הוכיחו באנדוקציה על יצירת פסוקים כי כל פסוק הנוצר מ-$\{\neg,\circ\}$ דואלי לעצמו.

3. (א)



ולכן כל המודלים האפשריים עבור (P,Q,R) הם: (F,T,F), (F,F,F), (F,T,T) ו-(F,T,F).

4.

(א) $\Phi = \{Q_{u,v} : (v,u) \in E\} \cup \{\neg Q_{v,u} : (v,u) \notin E\}$

(ב) $\Psi = \{P_{v,i} : v \in V, 1 \le i \le n, f(v) = c_i\} \cup$
$\{\neg P_{v,i} : v \in V, 1 \le i \le n, f(v) \neq c_i\}$

(ג) $\Delta = \{Q_{v,u} \to \neg(P_{v,i} \wedge P_{u,i}) : u,v \in V, 1 \le i \le n\}$

(ד) הדבר אפשרי כאשר G גרף סופי ואז הקבוצות Φ, Ψ, Δ סופיות וניתן להחליף כל קבוצה בגימום המרובה של פסוקיה.